

基于迭代重赋权最小二乘算法的块稀疏压缩感知

王文东¹, 王 尧², 王建军¹

(1. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715; 2. 西安交通大学数学与统计学院, 陕西西安 710049)

摘 要: 压缩感知是一种新颖的信号处理理论. 它突破了传统香农采样理论对采样的限制, 以信号的稀疏性或可压缩性为基础, 实现了信号的高效获取和精确重构. 然而在现实中, 部分稀疏信号还表现出一些其他结构, 典型的例子就是一类块稀疏信号, 其非零元素以块的形式出现. 针对这类信号, 本文研究了求解块稀疏压缩感知的迭代重赋权最小二乘算法(IRLS), 给出了该算法的理论分析: 误差估计和局部收敛性分析. 大量试验验证了基于迭代重赋权最小二乘算法的块稀疏压缩感知策略的有效性.

关键词: 压缩感知; 迭代重赋权最小二乘算法; 块稀疏信号; 误差估计; 局部收敛性

中图分类号: TN911.7.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)05-0922-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.05.014

Iterative Reweighed Least Squares Algorithm for Block-Sparse Compressed Sensing

WANG Wen-dong¹, WANG Yao², WANG Jian-jun¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

Abstract: Compressed sensing is a novel theory for signal processing which breaks through the sampling limitation based on traditional Shannon sampling theory, and makes it into reality that one can efficiently acquire and exactly reconstruct a signal using the prior knowledge that it is sparse or compressible. In reality, however, some signals exhibit additional structures, the typical example is the signal which is called block-sparse signal, i. e., the non-zero coefficients appear in a few fixed blocks. In order to tackle such block-sparse signal, in this paper we investigate the iterative reweighed least squares algorithm for block-sparse compressed sensing. The error estimation and local convergence analysis have been established. We simultaneously demonstrate the effectiveness of the iterative reweighed least squares algorithm (IRLS) for block-sparse compressed sensing by simulation results.

Key words: compressed sensing; iterative reweighed least squares algorithm; block-sparse signals; error estimation; local convergence

1 引言

不同于香农采样理论, 压缩感知(Compressed sensing)^[1~4]是一种新颖的信号处理理论. 它利用信号的稀疏性, 将采样和压缩合二为一, 突破了香农采样理论对信号采样的限制, 实现了信号的高效采集, 使得高速, 高质量的信息传输成为可能. 该理论一经提出便引起学者广泛研究^[5~10]. 目前已在医疗成像, 模式识别, 生物传感等领域得到广泛应用.

然而在现实中, 一些真实存在的信号还表现出一些其他结构, 比如一类块稀疏信号, 其非零元素以块的形

式出现. 从数学的角度来讲, 给定分块 $\tau = \{\tau_i | \sum_{i=1}^m \tau_i = N, 1 \leq \tau_i \leq N\}$, 任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 都可以被描述为

$$\mathbf{x} = [\underbrace{x_1, \dots, x_{\tau_1}}_{x^{[1]}}, \underbrace{x_{\tau_1+1}, \dots, x_{\tau_1+\tau_2}}_{x^{[2]}}, \dots, \underbrace{x_{N-\tau_m+1}, \dots, x_N}_{x^{[m]}}]^T.$$

如果向量 \mathbf{x} 在分块 τ 下至多有 s 个非零块, 那么称该向量为块 s -稀疏信号. 事实上, 这类信号的处理源自很多应用问题, 如稀疏信道估计^[11], 源定位^[12]和彩色图像处理^[13]等. 针对这类信号的重构, 文献^[14]提出了如下的 l_2/l_1 问题

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_{2,1}, \text{ s. t. } \Phi \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

其中 $\|\mathbf{x}\|_{2,1} = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}[i]\|_2$. 为了刻画 l_2/l_1 问题重构块稀疏信号的性能, 文献[14]给出了块意义下的限制等容性质. 即对于任意块 s -稀疏信号 x , 如果存在 $\delta \in (0, 1)$ 使得 $(1 - \delta) \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2 \leq (1 + \delta)$ 成立, 那么就称矩阵 Φ 满足 s -阶块限制等容性质, 若记 $\delta_{s,1\tau} = \inf_{0 < \delta < 1} \{\delta\}$, 那么称 $\delta_{s,1\tau}$ 为矩阵 Φ 在分块 τ 下的 s -阶块限制等容常数. 此外, 作者还证明了, 当测量矩阵 Φ 满足 $\delta_{2s,1\tau} < 0.4142$ 时, 可以通过对问题(1)的求解实现块 s -稀疏信号的精确重构. 其后, 文献[15]将上述条件作了进一步改善, 得到了 $\delta_{2s,1\tau} < 0.4931$. 事实上, 上述问题(1)的求解可以转化为一个二阶锥规划问题, 而当前很多优化软件都可以实现对该问题的求解, 一个比较著名的软件是 CVX 软件包 (<http://cvxr.com/cvx/>). 与此同时, 借鉴传统的 $l_q (0 < q \leq 1)$ 方法, 文献[13]研究了基于 $l_2/l_q (0 < q \leq 1)$ 问题的块稀疏信号重构问题

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} \|\mathbf{x}\|_{2,q}^q, \quad \text{s.t. } \Phi \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2)$$

其中 $\|\mathbf{x}\|_{2,q}^q = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}[i]\|_q^q$, 并提出了带约束条件的 IRLS 算法(简记为 Block-cIRLS); 文献[16]提出了一种基于迭代加权的块 l_1 算法(简记为 Block-IRLI); 而文献[17]则提出了无约束条件下的 IRLS 算法(简记为 Block-IRLS). 事实上, 文献[17]提出的算法是基于问题(2)的变形, 即下述的 $l_2/l_q (0 < q \leq 1)$ 型正则化问题

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} \|\mathbf{x}\|_{2,q}^{\varepsilon} + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (3)$$

其中 λ 是正则化参数, ε 为充分小的光滑参数. 并且有 $\|\mathbf{x}\|_{2,q}^{\varepsilon} = \sum_{i=1}^m (\varepsilon^2 + \|\mathbf{x}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}}$. 尽管文献[17]中的数值实验取得了比较理想的结果, 但是作者却没有对所提出的 Block-IRLS 算法做任何的理论分析. 在本文中, 我们首先给出了 Block-IRLS 算法的理论分析: 误差估计和局部收敛性分析; 其次, 通过数值仿真实验, 我们对本文的理论结果进行了验证, 取得了一定结果; 最后, 我们将 Block-IRLS 算法与求解 $l_2/l_q (0 < q \leq 1)$ 问题的其他算法进行了对比, 在平均时耗对比实验中, Block-IRLS 算法优势明显.

2 Block-IRLS 算法及其理论分析

2.1 Block-IRLS 算法

为了后续问题阐述的方便性, 我们首先给出文献[17]中的 Block-IRLS 算法.

算法 1 Block-IRLS 算法

输入: 分块 $\tau = \{\tau_i | \sum_{i=1}^m \tau_i = N, 1 \leq \tau_i \leq N\}$, 测量矩阵 Φ , 观测信号 \mathbf{b} ,

块稀疏估计 s .

步骤:

(1) 选择适当的正则化参数 λ 和 $q (0 < q \leq 1)$.

(2) 初始化迭代向量 $\mathbf{x}^{(0)}$, 使其满足 $\Phi \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. 并设置初始光滑参数 $\varepsilon_0 = 1$.

(3) 开始迭代, 设置 $k = 0$.

(4) 利用 $\mathbf{x}^{(0)}$ 和下面的式子求解 $\mathbf{x}^{(k+1)}$

$$\left[\frac{q \mathbf{x}^{(k+1)}[i]}{(\varepsilon^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \right]_{1 \leq i \leq m} + \frac{1}{\lambda} \Phi^T (\Phi \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}) = 0 \quad (4)$$

或

$$\left(\Phi^T \Phi + \text{Diag} \left[\frac{q \mathbf{I}_{\tau_i}}{(\varepsilon_i^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \right]_{1 \leq i \leq m} \right) \mathbf{x}^{(k+1)} = \Phi^T \mathbf{b} \quad (5)$$

其中 Diag 表示对角矩阵, \mathbf{I}_{τ_i} 表示 $\tau_i \times \tau_i$ 维的单位矩阵.

(5) 当 $\mathbf{x}^{(k)}$ 满足停机条件, 将其作为输出赋值给 \mathbf{x}_r , 同时结束算法, 否则执行下一步.

(6) 取常数 $\alpha (0 < \alpha < \frac{1}{m^{1/q}})$, 并更新 $\varepsilon_{k+1} = \min\{\varepsilon_k, r(\mathbf{x}^{(k+1)})_{s+1}/m\}$. 其中 $r(\mathbf{x})_{s+1}$ 表示向量 \mathbf{x} 的第 $s+1$ 个 l_2 范数最大的分块所对应的值.

(7) 更新 $k = k + 1$, 并返回第 4) 步继续执行.

输出: 重构信号 \mathbf{x}_r .

2.2 算法的理论分析

针对上述的 Block-IRLS 算法, 我们有下面两个定理. 首先给出 Block-IRLS 算法的误差估计定理, 即如下的定理 1.

定理 1 (误差估计) 设 \mathbf{x}^* 是一个满足 $\Phi \mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ 的块 s -稀疏信号. 记 ε_k 的极限为 ε_* . 若矩阵 Φ 满足 $\delta_{2s,1\tau} < 1$, 那么由 Block-IRLS 产生的序列 $\mathbf{x}^{(k)}$ 至少有一个收敛子序列. 当 $\varepsilon_* > 0$ 时, $\mathbf{x}^{(k)}$ 的任意收敛子序列的极限 $\mathbf{x}^{\varepsilon_*}$ 是问题(4)在 $\varepsilon = \varepsilon_*$ 下的一个局部最优解, 并且有

$$\|\mathbf{x}^{\varepsilon_*} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq C_1 \sqrt{\lambda} + C_2 \sigma_s(\mathbf{x}^{\varepsilon_*})_2 \quad (6)$$

其中 $\sigma_s(\mathbf{x}^{\varepsilon_*})_2$ 为信号 $\mathbf{x}^{\varepsilon_*}$ 的最优 s 项逼近误差, 满足 $\sigma_s(\mathbf{x}^{\varepsilon_*})_2 = \inf_{\|y\|_{2,0} \leq s} \|\mathbf{x}^{\varepsilon_*} - y\|_2$. 而当 $\varepsilon_* = 0$ 时, $\mathbf{x}^{(k)}$ 必存在一个收敛到块 s -稀疏信号 \mathbf{x}^0 的子序列, 有

$$\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|_2 \leq C_3 \sqrt{\lambda}. \quad (7)$$

本文出现的 $C_i (i = 1, 2, \dots, 9)$ 是与迭代次数 k , 测量矩阵 Φ 的维度 M, N 无关的正常数.

定理 1 的证明需要以下两个引理.

引理 1 对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}^N$ 和 $0 < q \leq 1$, 如果 $\varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1} \geq 0$, 则有

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{\frac{q}{2}} - (\varepsilon_{k+1}^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2)^{\frac{q}{2}} \\ & - \frac{q \mathbf{y}^T (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \geq \frac{q \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2}{2(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \end{aligned}$$

证明 由文献[10]的引理 2.3, 有

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{\frac{q}{2}} - (\varepsilon_{k+1}^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2)^{\frac{q}{2}} \\ & - \frac{q(\|\mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{y}\|_2)\|\mathbf{y}\|_2}{(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \geq \frac{q(\|\mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{y}\|_2)^2}{2(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{\frac{q}{2}} - (\varepsilon_{k+1}^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2)^{\frac{q}{2}} - \frac{q\mathbf{y}^T(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \\ & \geq \frac{q(\|\mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{y}\|_2)^2}{2(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} + \frac{q(\|\mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{y}\|_2)\|\mathbf{y}\|_2}{(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \\ & - \frac{q\mathbf{y}^T(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \\ & = \frac{q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2}{2(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \end{aligned}$$

引理 1 证毕.

引理 2 令 $J_{2,q}(\mathbf{x}, \varepsilon, \lambda) = \|\mathbf{x}\|_{2,q}^{\varepsilon,q} + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$, 如果 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 是问题(3)的解, 那么有

$$\|\Phi\mathbf{x}^{(k)} - \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}\|_2^2 \leq 2\lambda(J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k)}, \varepsilon_k, \lambda) - J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k+1)}, \varepsilon_{k+1}, \lambda)) \quad (8)$$

进一步, 存在正常数 C_4 , 有

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\|_2^2 \leq C_4(J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k)}, \varepsilon_k, \lambda) - J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k+1)}, \varepsilon_{k+1}, \lambda)) \quad (9)$$

证明 首先计算

$$\begin{aligned} & J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k)}, \varepsilon_k, \lambda) - J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k+1)}, \varepsilon_{k+1}, \lambda) \\ & = \sum_{i=1}^m (\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}} + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ & - \sum_{i=1}^m (\varepsilon_{k+1}^2 + \|\mathbf{x}^{(k+1)}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}} \\ & - \frac{1}{2\lambda} \|\Phi\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ & = \sum_{i=1}^m (\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}} \\ & - \sum_{i=1}^m (\varepsilon_{k+1}^2 + \|\mathbf{x}^{(k+1)}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}} \\ & - \frac{1}{2\lambda} (\|\Phi\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\|_2^2 - \|\Phi\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}\|_2^2) \\ & = \sum_{i=1}^m (\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}} \\ & - \sum_{i=1}^m (\varepsilon_{k+1}^2 + \|\mathbf{x}^{(k+1)}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}} \\ & + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi\mathbf{x}^{(k)} - \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}\|_2^2 \\ & + \frac{1}{2\lambda} (\Phi\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b})^T (\Phi\mathbf{x}^{(k)} - \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}) \end{aligned}$$

对式(4)两边作用 $\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)}$, 得

$$\frac{1}{\lambda} (\Phi\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b})^T (\Phi\mathbf{x}^{(k)} - \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}) =$$

$$- \sum_{i=1}^m \frac{q(\mathbf{x}^{(k+1)}[i])^T (\mathbf{x}^{(k)}[i] - \mathbf{x}^{(k+1)}[i])}{(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{-\frac{q}{2}}},$$

利用引理 1, 可得

$$\begin{aligned} & J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k)}, \varepsilon_k, \lambda) - J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k+1)}, \varepsilon_{k+1}, \lambda) \\ & = \sum_{i=1}^m ((\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}} - (\varepsilon_{k+1}^2 + \|\mathbf{x}^{(k+1)}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}} \\ & - \frac{q(\mathbf{x}^{(k+1)}[i])^T (\mathbf{x}^{(k)}[i] - \mathbf{x}^{(k+1)}[i])}{2(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}}) \\ & + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi\mathbf{x}^{(k)} - \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}\|_2^2 \\ & \geq \sum_{i=1}^m \left(\frac{q\|\mathbf{x}^{(k)}[i] - \mathbf{x}^{(k+1)}[i]\|_2^2}{2(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \right) \\ & + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi\mathbf{x}^{(k)} - \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}\|_2^2 \end{aligned} \quad (10)$$

由式(10)可证得式(8)成立.

由式(8)进一步可知, $J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k)}, \varepsilon_k, \lambda)$ 是一个关于变量 k 单调递减的序列, 因此

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq m} \{\|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^q\} \leq \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{2,q}^q \leq \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{2,q}^{\varepsilon_k,q} \\ & \leq J_{2,q}(\mathbf{x}^{(k)}, \varepsilon_k, \lambda) \leq J_{2,q}(\mathbf{x}^{(0)}, \varepsilon_0, \lambda) \\ & = \|\mathbf{x}^{(0)}\|_{2,q}^{\varepsilon_0,q} \end{aligned}$$

从而存在常数 β , 使得对任意 $k \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq m$, 有 $\|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2 \leq \beta$.

进而有

$$\frac{q}{2(\varepsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \geq \frac{q}{2(\varepsilon_0^2 + \beta^2)^{1-\frac{q}{2}}}.$$

取 $\frac{1}{C_4} = \frac{q}{2(\varepsilon_0^2 + \beta^2)^{1-\frac{q}{2}}}$, 利用式(10)可证式(9)成立.

立.

引理 2 证毕.

定理 1 的证明: 利用引理 1、引理 2 以及文献[10]中定理 2.2 的证明方法, 定理 1 可以类似证明, 此处略去具体过程.

接下来, 我们给出 Block-IRLS 算法的局部收敛性分析结果, 即下面的定理 2.

定理 2 (局部收敛性分析) 设 \mathbf{x}^* 是一个满足

$$\begin{aligned} & \Phi\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \text{ 的块 } s\text{-稀疏信号, 矩阵 } \Phi \text{ 满足 } \delta_{2s1\tau} < \frac{1}{2}, \\ & \frac{\delta_{3s1\tau}}{1 - \delta_{2s1\tau}} < 1. \mathbf{x}^{(k)} \text{ 是 Block-IRLS 算法所产生的序列. 令} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\eta}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*$, 并设 ε_k 的极限 ε_* 满足 $\varepsilon_* > 0$. 如果对于任意的自然数 k , 存在常数 $\rho \in (0, 1)$ 使得 $\|\boldsymbol{\eta}^{(k)}\|_{2,q} \leq \rho \min_{i \in S_0} \|\mathbf{x}^*[i]\|_2$ 成立, 那么存在正常数 C_5 和 C_6 有

$$\|\boldsymbol{\eta}^{(k+1)}\|_{2,q} \leq C_5 \|\boldsymbol{\eta}^{(k)}\|_{2,q}^{q(2-q)} + C_6 \sqrt{\lambda^q}.$$

为证明定理 2, 我们需要下述的引理 3.

引理 3 令 S_0 为向量 \mathbf{x}^* 的非零快指集, $\boldsymbol{\eta}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*$. 若矩阵 Φ 满足 $\delta_{2s1\tau} < 1$, 则有

$$\| \boldsymbol{\eta}_{S_0}^{(k+1)} \|_{2,q} \leq C_8 \| \boldsymbol{\eta}_{S_0}^{(k+1)} \|_{2,q} + C_9 \lambda. \quad (11)$$

证明 首先将 $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ 按照下述方式进行分解

$\boldsymbol{\eta}^{(k+1)} = \sum_{i=0}^J \boldsymbol{\eta}_{S_i}^{(k)}$, 其中 S_i 包含了分块 τ 的 s 个元素(可能除 S_j), 且对于任意 $0 \leq i < j \leq m$ 有 $S_i \cap S_j = \emptyset$. 而 $\boldsymbol{\eta}_{S_i}^{(k)}$ 则是 $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ 在集合 S_i 上的限制. 且对于任意的正整数 i 有 $\| \boldsymbol{\eta}_{S_i}^{(k)}[1] \|_2 \geq \| \boldsymbol{\eta}_{S_i}^{(k)}[2] \|_2 \geq \dots \geq \| \boldsymbol{\eta}_{S_i}^{(k)}[s] \|_2 \geq \| \boldsymbol{\eta}_{S_{i+1}}^{(k)}[1] \|_2 \geq \| \boldsymbol{\eta}_{S_{i+1}}^{(k)}[2] \|_2 \geq \dots$

定义 $\boldsymbol{d}_j^{(k)} = [\| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k)}[1] \|_2, \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k)}[2] \|_2, \dots, \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k)}[s] \|_2]$, 那么对于所有的 $j \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \|_2 &= \| \boldsymbol{d}_j^{(k+1)} \|_2 \leq s^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \| \boldsymbol{d}_{j-1}^{(k+1)} \|_q \\ &= s^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \| \boldsymbol{\eta}_{S_{j-1}}^{(k+1)} \|_{2,q} \end{aligned}$$

进一步, 有

$$\sum_{j \geq 2} \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \|_2 \leq s^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \sum_{j \geq 1} \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \|_{2,q}$$

令 $S = S_0 \cup S_1$, 得

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{\eta}_{S_0}^{(k+1)} \|_{2,q} &= \| \boldsymbol{d}_0^{(k+1)} \|_q \leq s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \| \boldsymbol{d}_0^{(k+1)} \|_2 \\ &= s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \| \boldsymbol{\eta}_{S_0}^{(k+1)} \|_2 \leq s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2. \end{aligned}$$

下面估计 $\| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2$ 的上限.

由式(4)得

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2^2 &= \langle \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)}, \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)}, (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}) \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} \rangle + \\ &\quad \lambda \left\langle \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)}, \left[\frac{q \boldsymbol{x}^{(k+1)}[i]}{(\epsilon_k^2 + \| \boldsymbol{x}^{(k)}[i] \|_2^2)^{1 - \frac{q}{2}}} \right]_{i \in S} \right\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

利用文献[17]中的引理 1, 有

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)}, (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}) \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} \rangle \\ &\leq \langle \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)}, (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}) \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \rangle \\ &+ \sum_{j \geq 2} \langle \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)}, (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}) \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \rangle \\ &\leq \delta_{2s1\tau} \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2^2 + \delta_{3s1\tau} \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2 \left(\sum_{j \geq 2} \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \|_2 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

由 $\epsilon_k \geq \epsilon_* > 0$ 和 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的有界性, 对于(12)式的第二项, 有如下估计

$$\begin{aligned} &\left\langle \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)}, \left[\frac{q \boldsymbol{x}^{(k+1)}[i]}{(\epsilon_k^2 + \| \boldsymbol{x}^{(k)}[i] \|_2^2)^{1 - \frac{q}{2}}} \right]_{i \in S} \right\rangle \\ &\leq \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2 (\epsilon_*)^{q-2} [\| \boldsymbol{x}^{(k+1)}[i] \|_2]_{i \in S} \|_2 \\ &= (\epsilon_*)^{q-2} \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2 \| \boldsymbol{x}_S^{(k+1)} \|_2 \\ &\leq C_7 \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2. \end{aligned} \quad (14)$$

联合式(12)、式(13)和式(14), 得

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2 &\leq \delta_{2s1\tau} \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2 + \delta_{3s1\tau} \sum_{j \geq 2} \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \|_2 + C_7 \lambda, \\ \text{即 } \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2 &\leq \frac{\delta_{3s1\tau}}{1 - \delta_{2s1\tau}} \sum_{j \geq 2} \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \|_2 + \frac{C_7}{1 - \delta_{2s1\tau}} \lambda. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{\eta}_{S_0}^{(k+1)} \|_{2,q} &\leq s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \| \boldsymbol{\eta}_S^{(k+1)} \|_2 \\ &\leq s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \frac{\delta_{3s1\tau}}{1 - \delta_{2s1\tau}} s^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \sum_{j \geq 1} \| \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \|_{2,q} \\ &\quad + \frac{C_7 s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}}{1 - \delta_{2s1\tau}} \lambda \\ &\leq \frac{\delta_{3s1\tau}}{1 - \delta_{2s1\tau}} \| \sum_{j \geq 1} \boldsymbol{\eta}_{S_j}^{(k+1)} \|_{2,q} + \frac{C_7 s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}}{1 - \delta_{2s1\tau}} \lambda \\ &\leq \frac{\delta_{3s1\tau}}{1 - \delta_{2s1\tau}} \| \boldsymbol{\eta}_{S_0}^{(k+1)} \|_{2,q} + \frac{C_7 s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}}{1 - \delta_{2s1\tau}} \lambda \end{aligned}$$

令 $C_8 = \frac{\delta_{3s1\tau}}{1 - \delta_{2s1\tau}}$, $C_9 = \frac{C_7 s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}}{1 - \delta_{2s1\tau}}$, (11)式得证.

引理 3 证毕.

定理 2 的证明: 利用引理 3 以及文献[10]中定理 2.9 的证明方法, 定理 1 可以类似证明, 此处略去具体过程.

3 数值实验

为了说明 Block-IRLS 算法的有效性, 本文分别做了两组实验: Block-IRLS 算法理论验证实验和算法对比实验. 实验在 CPU 为 Intel 奔腾双核 E2210(2.2GHz), 内存为 2GB 的台式电脑上进行, 运行软件为 MATLAB 7.14 (R2012a). 实验中, 测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 服从标准高斯分布, 测试信号 \boldsymbol{x}^* 中的非零块位置随机产生, 而其数值也服从标准高斯分布. 设定采样次数 $M = 64$, 信号维度 $N = 256$, 并取 $\alpha = 0.7$, 光滑参数 $\epsilon_0 = 1$. 为了克服实验结果的偶然性, 所有实验将独立重复地进行 100 次, 并以相应的平均值作为最终统计结果.

3.1 Block-IRLS 算法理论验证

在这部分实验中, 选取 $q = 0.1, 0.3, 0.7, 1$, 并设定分块形式为均分 64 块, 当迭代次数大于 100 时, Block-IRLS 算法终止. 定理 1 的理论结果表明, 误差上限可以通过正则化参数 λ 和最优 s 项逼近误差控制. 然而, 在实际应用中, 正则化参数的选取一直都是一个难点问题, 在本节和后续实验中, 统一设定正则化参数 $\lambda = 1 \times 10^{-7}$. 针对不同的 q , 图 1 研究了误差与最优 s 项逼近误差之间的关系. 由图可知, 误差随着最优 s 项逼近误差的减小而减小, 同时最优 s 项逼近误差与误比值总能稳定在 10^{-1} 附近, 这反映了定理 1 对 Block-IRLS 算法误差上限估计的有效性. 定理 2 在定理 1 的基础上, 研究了迭代误差之间的关系. 由于混合范数意义下的迭

代误差缺乏较强的直观性. 为此, 我们将采用 l_2 范数迭代误差 $\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \|_2$ 来代替混合范数迭代误差. 在块稀疏度 $s=4$ 的条件下, 图 2 研究了迭代次数与迭代误差之间的关系. 由图可知, 当 $q=1$ 时, 迭代误差收敛率

是近似线性的, 且迭代误差下降缓慢; 而当 $0 < q < 1$ 时, 迭代误差呈近似超线性收敛, 其下降速度则要明显加快, 只需约 18 次迭代就能达到最优误差.

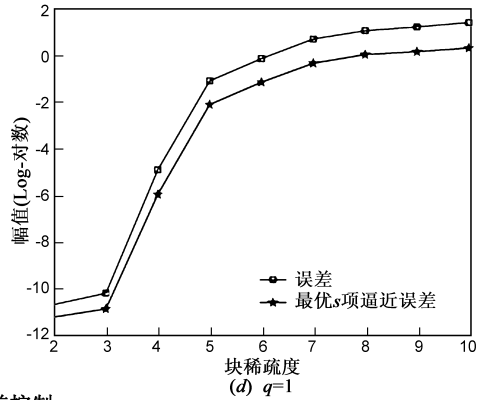
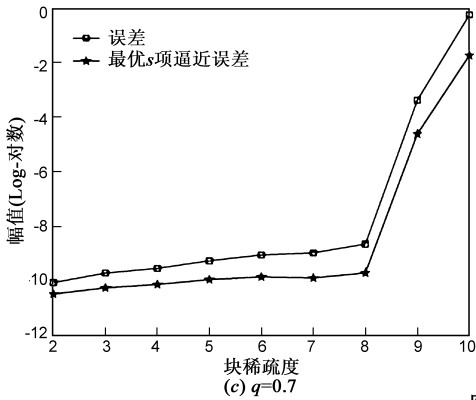
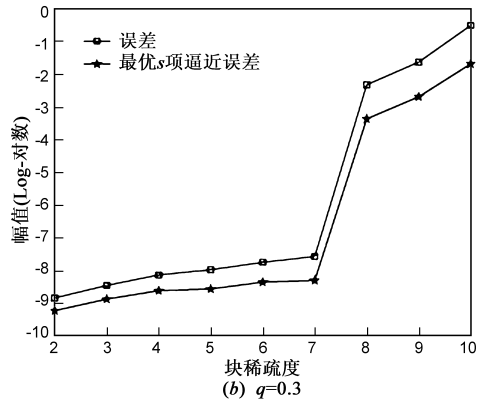
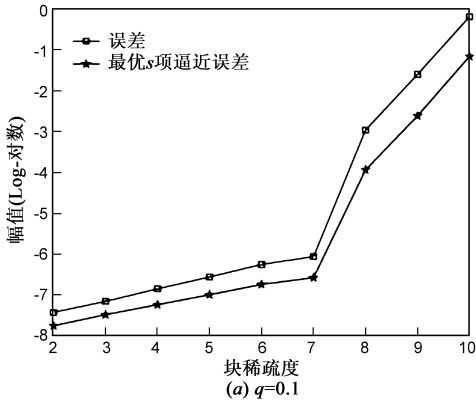


图1 误差控制

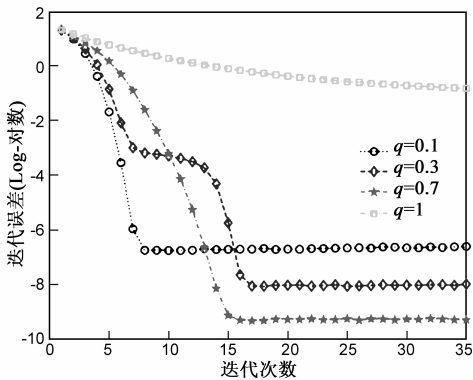


图2 迭代误差

3.2 算法对比

为了证实 Block-IRLS 算法的有效性, 本文将其与求解 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 问题的其他算法进行了对比. 它们主要来自文献[13]的 Block-cIRLS 算法和文献[19]的 Block-IRL1

算法. 实验中, 保持 Block-IRL1 算法和 Block-cIRLS 算法的参数与原始论文一致, 而 Block-IRLS 算法的参数则保持与前述实验一致. 图 3 在分块形式为均分 64 块的条件下, 研究了块稀疏度与相对误差之间的关系. 其中相对误差定义为 $\| \mathbf{x}_r - \mathbf{x}^* \|_2 / \| \mathbf{x}^* \|_2$ (\mathbf{x}_r 表示重构信号, \mathbf{x}^* 表示原始信号) 由图 3(a) 可知, Block-IRL1 的算法的相对误差在稀疏度小于 6 时, 达到约 10^{-25} , 是三种算法中最小的. 而当稀疏度达到 10 时, 三种算法相对误差基本一样, 约 10^{-3} . 然而, 在图 3(b) 的时耗对比实验中, Block-IRL1 算法对单个块稀疏信号的平均重构时间高达 19 秒, 这显然不利于大规模问题的求解. 而 Block-IRLS 算法平均时耗仅为 0.3 秒, 算法执行效率是 Block-cIRLS 算法的 5 倍, 是 Block-IRL1 算法的 63.3 倍. 图 4 则是在分块形式为非均分 64 块下进的, 得到了类似图 3 的结果.

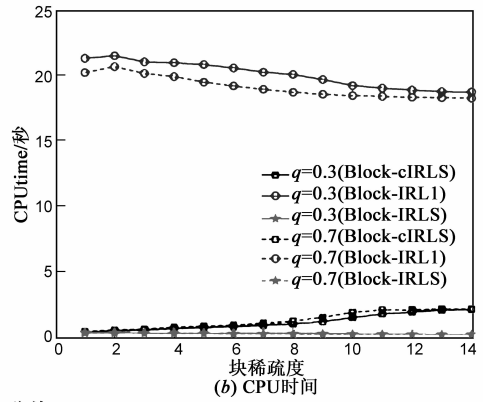
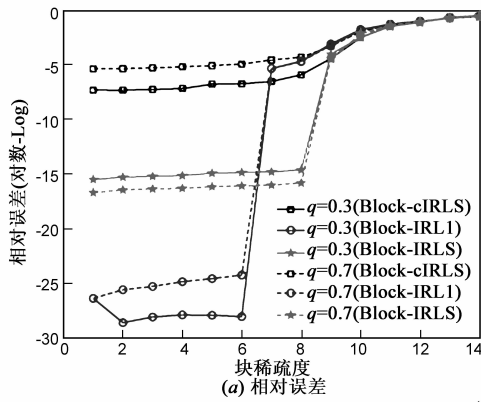


图3 均匀分块

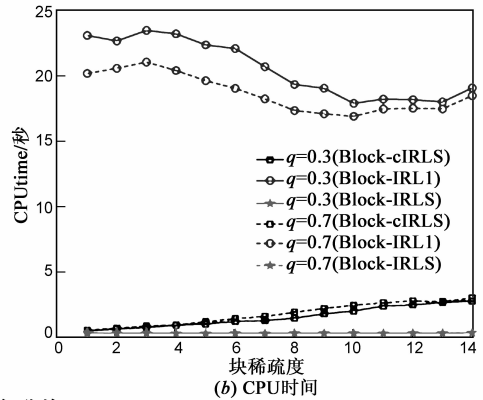
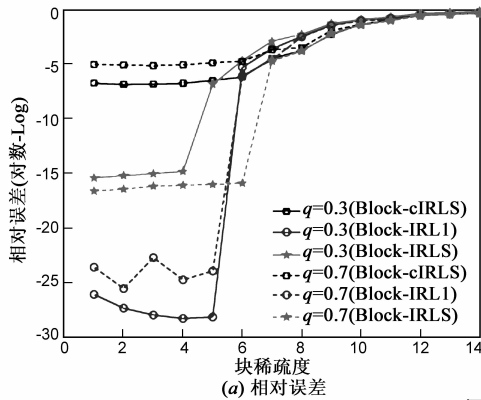


图4 非均匀分块

4 结论

本文对处理块稀疏信号的 Block-IRLS 进行了研究, 获得了该算法的误差上限估计和局部收敛性结果. 其中误差上限估计结果表明, 误差上限与正则化参数 λ 和最优 s 项逼近误差有关, 同时 Block-IRLS 算法能找到局部最优解. 此外, 本文进行了一系列实验来支撑本文的理论结果. 所获结果对基于非凸 $l_2/l_q (0 < q < 1)$ 极小化方法的块稀疏信号重构具有借鉴作用, 对于压缩感知技术的进一步发展具有理论价值和实际意义.

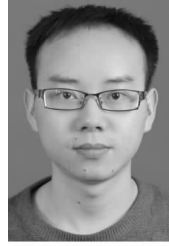
参考文献

[1] Donoho D. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
 [2] Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(12): 4203 - 4215.
 [3] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 侯彪. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 20(7): 1651 - 1662.
 Jiao L C, Yang S Y, Liu F, Hou B. Development and prospect of compressivesensing [J]. Acta Electronica sinica, 2011, 20(7): 1651 - 1662. (in Chinese)

[4] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070 - 1081.
 Shi G M, Liu D H, Gao D H, et al. Advances in theory and application of compressed sensing [J]. Acta Electronica sinica, 2009, 37(5): 1070 - 1081. (in Chinese)
 [5] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. Comptes Rendus Mathématique, 2008, 346(9): 589 - 592.
 [6] Candès E J, Plan Y. A probabilistic and RIPless theory of compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(11): 7235 - 7254.
 [7] Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization [J]. Signal Processing Letters, IEEE, 2007, 14(10): 707 - 710.
 [8] 张海, 王尧, 常象宇, 徐宗本. $L_{1/2}$ 正则化 [J]. 中国科学: 信息科学, 2010, 40(3): 412 - 422.
 Zhang H, Wang Y, Chang X Y, Xu Z B. $L_{1/2}$ regularization [J]. Scientia Sinica Informationis, 2010, 40(3): 412 - 422. (in Chinese)
 [9] Xu Z B, Guo H L, Wang Y, et al. Representative of $L_{1/2}$ regularization among $l_q (0 < q \leq 1)$ regularizations: an experimental study based on phase diagram [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(7): 1225 - 1228.

- [10] Lai M J, Xu Y Y, Yin W T. Improved iteratively reweighted least squares for unconstrained smoothed l_q minimization[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2013, 51(2): 927 – 957.
- [11] Cotter S, Rao B. Sparse channel estimation via matching pursuit with application to equalization[J]. IEEE Transactions on Communications, 2002, 50(3): 374 – 377.
- [12] Malioutov D, Cetin M, Willsky A. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3010 – 3022.
- [13] Majumdar A, Ward R. Compressed sensing of color images [J]. Signal Processing, 2010, 90(12): 3122 – 3127.
- [14] Eldar Y, Mishali M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(11): 5302 – 5316.
- [15] Lin J H, Li S. Block sparse recovery via mixed l_2/l_1 minimization[J]. Acta Math Sinica, 2013, 29(7): 1401 – 1412.
- [16] Yin H T, Li S T, Fang L Y. Block-sparse compressed sensing: non-convex model and iterative re-weighted algorithm [J]. Inverse Problems in Science and Engineering, 2013, 21(1): 141 – 154.
- [17] Wang Y, Wang J J, Xu Z B. On recovery of block-sparse signals via mixed l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) norm minimization [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2013, 2013(1): 1 – 17.

作者简介



王文东 男, 1989 年 11 月出生, 陕西汉中
人, 硕士. 主要从事机器学习、压缩感知方向的
研究.

E-mail: d. sytan@foxmail.com



王 尧 男, 1983 年 11 月出生, 湖南永州
人, 博士, 讲师. 主要从事低秩矩阵分解与恢复、
压缩感知、高维统计推理等方向的研究.

E-mail: yao. s. wang@gmail.com



王建军(通信作者) 男, 1976 年 12 月出生,
宁夏惠农人, 博士, 教授. 主要从事海量数据分
析、智能信息处理、逼近论等方向的研究.

E-mail: wjj@swu.edu.cn